



TITLE:

ホワイトノイズによる量子確率解析(筑波大学開学20周年記念第2回
『非平衡系の統計物理-現状と展望』シンポジウム,研究会報告)

AUTHOR(S):

尾畑, 伸明

CITATION:

尾畑, 伸明. ホワイトノイズによる量子確率解析(筑波大学開学20周年記念第2回『非平衡系の統計物理-現状と展望』シンポジウム,研究会報告). 物性研究 1994, 62(1): 62-85

ISSUE DATE:

1994-04-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/95301>

RIGHT:

ホワイトノイズによる量子確率解析

名古屋大学理学部数学教室

尾 畑 伸 明

序

よく知られているように、ガウス型定常過程 $\{x(t)\}$ で、平均と共分散関数がそれぞれ

$$E(x(t)) = 0, \quad E(x(s)x(t)) = \delta(s - t), \quad (1)$$

で与えられるものを(ガウス型)ホワイトノイズと呼ぶ. そのスペクトル測度(共分散関数の逆フーリエ変換)は全域でフラットなルベック測度であるから、確かにホワイトである. また、ホワイトノイズはブラウン運動 $\{B(t)\}$ の時間微分:

$$\frac{d}{dt} B(t) = x(t) \quad (2)$$

として得られることも周知であろう. (もちろん、ブラウン運動の軌跡は時間微分可能ではなく、有界変動でさえないが!) ホワイトノイズは、数学的には、超関数論を応用して確率超過程として実現される. 一方で、(2) より時間パラメーターを陽に含む $\{x(t)\}$ は時間発展が直感的に捉えやすく、(1) より $\{x(t)\}$ はあたかも連続無限個の直交座標系であるがごとく見える. いわゆる「ホワイトノイズ解析」は、この視点に立って smear しない $\{x(t)\}$ をじかに扱える無限次元解析を目指したものであり、飛田武幸氏が 1975 年のレクチャーノート [10] を皮切りとして提唱されてきた(なお、[11] も参照). その理論の枠組は、一言でいって、ガウス空間上のシュワルツ型超関数論である. ここ数年来、この理論の基礎づけが完成し、(古典的) 確率解析・ディリクレ形式・ファインマン積分などへの応用 [13] に加え、ガウス空間上の作用素論としての観点からも発展しつつある.

この論文では、拙著 [24] に従って、ホワイトノイズ解析の基礎的事項、特に、ガウス空間上の作用素論を紹介し、その(将来的)応用として量子確率論 ([1], [2], [3], [8], [22], [26]) へのアプローチを図ることにある. 手始めにすることは、量子確率過程論の基礎概念を我々の立場から再考することであり、本稿の目的でもあるが、まだ端初についたばかりである. 従来、量子確率論においては古典確率解析のアイデアと相まって、ヒルベルト空間上の有界作用素のなす作用素環の理論が主要な道具となっている. そこに超関数論を持ち込むことは、まんざら無意味ではないと考えている. なお、この論文では触れないが、ホワイトノイズ解析の枠組は、“時間”パラメーター空間を基礎におく必要はなく、任意次元の位相空間でよい. これは、物理では場の理論、数学では確率場や無限次元調和解析への発展を念頭

にしているからである。しかしながら、物理学にどのくらいの寄与ができるかの判断は読者に委ねられるべきであろう。

謝 辞 この論文の直接的なきっかけは、1993 年 11 月に筑波大学で開かれた統計物理に関する研究集会である。そこで議論された広範な話題には大いに啓発された。この興味深い集会を組織され、やや畑違いである私を誘ってくださった方々にお礼申し上げたい。とりわけ、有光敏彦氏との議論は今後の展開を考える上で興味深く有益であった。今後は、場の理論や統計物理との交流をより深めつつ、議論を進めてゆきたいと考えている。

1 ホワイトノイズ超関数

ホワイトノイズ解析の枠組は、久保・竹中 [20] によって公理化され、現在では、それをやや整理した形で用いている ([12], [14], [23], [24], [25] などを参照)。一般には、位相空間 T とその上の σ -有限測度 ν から作られるヒルベルト空間 $H = L^2(T, \nu)$ を基礎として展開される。 T は、通常は時間 ($T = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$, etc.), 又は時空 ($T = \mathbb{R}^D, \mathbb{Z}^D, M^4$, etc.) と考える。この論文では、後で確率“過程”を扱うので、 $T = \mathbb{R}$ ととして時間と考える。

1.1 フォック空間

まず、実及び複素ヒルベルト空間を固定する:

$$H = L^2(\mathbb{R}, dt; \mathbb{R}), \quad H_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}, dt; \mathbb{C}).$$

内積とノルムは、 (\cdot, \cdot) and $|\cdot|_0$ で表す。(ここで添字の 0 は後で便利のように付けてある。) 以下の議論では、内積よりも標準双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いる方が便利である。これは実空間を扱う限り内積と一致するが、複素空間では注意を要する。実際、

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \eta(t) dt, \quad (\xi, \eta) = \langle \bar{\xi}, \eta \rangle.$$

さらに、記法であるが、 $H_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ で n 重テンソル積を、 $H_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ でその対称部分を表す。内積・標準双線型形式・ノルムは同じ記号で表す。

$H_{\mathbb{C}}$ 上のボソン・フォック空間とはベクトル空間

$$\Gamma(H_{\mathbb{C}}) = \left\{ \mathbf{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty}; f_n \in H_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|_0^2 < \infty \right\}$$

に内積とノルムをそれぞれ、

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} n! (f_n, g_n), \quad \|\mathbf{f}\|_0 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|_0^2,$$

によって定義して得られるヒルベルト空間である。いわゆる指数ベクトルは

$$\phi_{\xi} = \left(1, \xi, \frac{\xi^{\otimes 2}}{2!}, \dots, \frac{\xi^{\otimes n}}{n!}, \dots \right), \quad \xi \in H_{\mathbb{C}},$$

によって定義される。その重要性は、 $\{\phi_{\xi}; \xi \in H_{\mathbb{C}}\}$ は (i) 一次独立であり; (ii) $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ の稠密な部分空間を張る、ことにある。特に、 ϕ_0 は真空ベクトルと呼ばれる。

1.2 ガウス空間

まず調和振動子のハミルトニアンに対応する微分作用素

$$A = 1 + t^2 - \frac{d^2}{dt^2},$$

を考えよう. A の固有値と固有関数は全て知られている. ここで重要なことは,

(A1) A は正の自己共役作用素で, A^{-1} がヒルベルト・シュミット型になる;

(A2) $\inf \text{Spec}(A) > 1$.

実際, 固有値は $\lambda_j = 2(j+1)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, なので $\|A^{-1}\|_{HS}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{-2} < \infty$ かつ $\inf \text{Spec}(A) = 2$. 本稿では固有関数の具体形は必要ないので, 正規化したそれを $e_j(t)$ で表す. 下の議論から判るが, 上の性質 (A1) と (A2) は使われ方に大きな違いがある.

さて任意の $p \in \mathbb{R}$ に対して

$$|\xi|_p = |A^p \xi|_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{2p} \langle \xi, e_j \rangle^2 \right)^{1/2}, \quad \xi \in H,$$

とおく. $p \geq 0$ のときは, E_p によって $|\xi|_p < \infty$ をみたす $\xi \in H$ の全体を, また E_{-p} によって H のノルム $|\cdot|_{-p}$ による完備化とする. このとき, 全ての E_p は $|\cdot|_p$ をノルムとするヒルベルト空間となり, 自然な包含関係が成り立つ:

$$\cdots \subset E_q \subset \cdots \subset E_p \subset \cdots \subset E_0 = H \subset \cdots \subset E_{-p} \subset \cdots \subset E_{-q} \subset \cdots, \quad 0 \leq p \leq q.$$

そこで

$$E = \text{proj} \lim_{p \rightarrow \infty} E_p = \bigcap_{p \geq 0} E_p$$

とおく. 定義により, E の位相はノルム族 $\{|\cdot|_p\}_{p \in \mathbb{R}}$ で与えられる: すなわち, $\xi_n \in E$ が $\xi \in E$ に収束するとは, すべての p に対して, $|\xi_n - \xi|_p \rightarrow 0$ となること. 実際は, そのノルムは整列されているから, 可算個取り出せばよく (例えば, $p \in \mathbb{Z}_+$), A^{-1} がヒルベルト・シュミット型であることを併せて, E は核型フレシェ空間となる. (核型フレシェ空間は超関数論で極めて基本的である: [9], [28] 等を参照.) なお, E の構成に性質 (A1) を用いているが (A2) は用いていない.

E は位相線型空間となったからその上の連続線型作用素のなす空間, すなわち E の共役空間 E^* が考えられる. 構成法から

$$E^* = \text{ind} \lim_{p \rightarrow \infty} E_{-p} = \bigcup_{p \geq 0} E_{-p}$$

が (詳しく言えば, 強位相と帰納極限位相の一致もこめて) 成り立つ. こうして我々は, いわゆる Gelfand triple $E \subset H \subset E^*$ を構成した. さらに注意して欲しいことは, 実は, シュワルツの急減少関数と緩増加超関数が再構成されているのである:

$$E = \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

$E^* \times E$ 上の標準双線型形式はやはり $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とかく。構成法により、これはヒルベルト空間 H の (実) 内積を拡張したものになっているので、記法上の問題はない。

ボホナー・ミンロスの定理 (例えば, [11]) によって E^* 上の確率測度 μ で

$$\exp\left(-\frac{1}{2}|\xi|_0^2\right) = \int_{E^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mu(dx), \quad \xi \in E,$$

をみたすものが一意的に存在する。これを (標準) ガウス測度と呼び、確率空間 (E^*, μ) をガウス空間と呼ぶ。確率変数 ϕ の平均値はいつもの通り

$$E(\phi) = \int_{E^*} \phi(x) \mu(dx), \quad \phi \in L^1(E^*, \mu), \quad (3)$$

で表す。

1.3 ウィナー・伊藤展開

ガウス空間の重要性はいろいろあるが、ここでは $(L^2) = L^2(E^*, \mu; \mathbb{C})$ が $H_{\mathbb{C}}$ 上の (ボゾン) フォック空間と同型になることを思い出しておく。 $E_{\mathbb{C}}$ は \mathbb{C} -値の 1 変数急減少関数の空間であるから、 $E_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ は n 変数急減少関数の空間、 $E_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ は n 変数急減少関数で対称なもの全体の全体となる。 $(E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})^* \times (E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})$ 上の標準双線型形式 (エルミート的ではない) も同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す。さて、特別な役割をする 2 変数超関数 $\tau \in (E \otimes E)^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ を定義する:

$$\langle \tau, \xi \otimes \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in E.$$

同じことであるが、

$$\langle \tau, \omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t, t) dt, \quad \omega \in E \otimes E = \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

次に、 $x \in E^*$ に対して $:x^{\otimes n}: \in (E^{\otimes n})_{\text{sym}}^*$ を帰納的に定義する:

$$\begin{aligned} :x^{\otimes 0}: &= 1, \\ :x^{\otimes 1}: &= x, \\ :x^{\otimes n}: &= x \hat{\otimes} :x^{\otimes(n-1)}: - (n-1)\tau \hat{\otimes} :x^{\otimes(n-2)}:, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

指数ベクトルを用いて次のように定義してもよい:

$$\phi_{\xi}(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, \frac{\xi^{\otimes n}}{n!} \right\rangle = \exp\left(\langle x, \xi \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle\right), \quad \xi \in E_{\mathbb{C}}.$$

上式の右辺は、正規化した (すなわち、 $E(\phi_{\xi}) = 1$) 指数関数である。

エルミート多項式が 1 次元ガウス測度に関して直交系になることから、次の直交関係式が従う: $f_m \in E_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}$, $g_n \in E_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ に対して、

$$\int_{E^*} \langle :x^{\otimes m}:, f_m \rangle \langle :x^{\otimes n}:, g_n \rangle \mu(dx) = n! \langle f_m, g_n \rangle \delta_{mn}. \quad (4)$$

これを用いると、通常の L^2 -近似の議論ができて、すべての $f \in H_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ に対して、関数 $E^* \ni x \mapsto \langle :x^{\otimes n} :, f \rangle$ が定義される。もちろんこの場合は各点ごとに定義されず、 L^2 の意味で、よって殆どいたるところで定義されるにすぎない。 $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ でそのような関数の全体を表す。

定理 1.1 (WIENER-ITÔ) ヒルベルト空間 (L^2) は、 $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ の直和に分解される:

$$(L^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n(\mathbb{C}).$$

もう少し詳しくは、任意の $\phi \in (L^2)$ に対して、関数列 $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \Gamma(H_{\mathbb{C}})$ が一意的に存在して、

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle :x^{\otimes n} :, f_n \rangle, \quad x \in E^*, \quad (5)$$

と表される。但し、 $\langle :x^{\otimes n} :, f_n \rangle$ は $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ に属する関数であり、級数は L^2 の意味で収束する。さらに、

$$\|\phi\|_0^2 \equiv \int_{E^*} |\phi(x)|^2 \mu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_0^2.$$

また、このような対応でユニタリー同型: $(L^2) \cong \Gamma(H_{\mathbb{C}})$ を得る。真空ベクトルは (L^2) においては恒等的に 1 となる関数 $\phi_0(x) \equiv 1$ である。

1.4 ホワイトノイズ超関数の構成

\mathbb{R} 上の緩増加超関数は Gelfand triple $E = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset H = L^2(\mathbb{R}) \subset E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ から得られるが、この Gelfand triple はある特別な作用素 A から構成された。この構成法をガウス空間の場合に適用することによって、一つの無限次元空間上の超関数論が構成される。これがホワイトノイズ解析の基本的な枠組みを与える。具体的には、次のようにする。 $\phi \in (L^2)$ のウィナー・伊藤展開が (5) のように与えられているとき、

$$\Gamma(A)\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle :x^{\otimes n} :, A^{\otimes n} f_n \rangle,$$

によって定義される $\Gamma(A)$ は A の第 2 量子化と呼ばれる。通常の L^2 -定義域を考えて、 $\Gamma(A)$ は正の自己共役作用素となり、さらに A の性質: (A2) $\inf \text{Spec}(A) > 1$ から $\Gamma(A)^{-1}$ がヒルベルト・シュミット型になる。実際、(A2) は等式

$$\|\Gamma(A)^{-1}\|_{HS}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_0+n_1+\dots+n=n} (\lambda_0^{n_0} \lambda_1^{n_1} \dots)^{-2} = \prod_{j=0}^{\infty} \sum_{n_j=0}^{\infty} \lambda_j^{-2n_j} = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - \lambda_j^{-2})^{-1}$$

を保証し、この量は $\|A^{-1}\|_{HS}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_j^{-2} < \infty$ から有限である。

そうすれば、 $E \subset H \subset E^*$ を構成したのと全く同様にして、Gelfand triple:

$$(E) \subset (L^2) = L^2(E^*, \mu; \mathbb{C}) \subset (E)^*.$$

が得られる。特に, (E) は核型フレシェ空間となる。 (E) の元をホワイトノイズ・テスト関数, $(E)^*$ の元をホワイトノイズ超関数と呼ぶ。 $(E)^* \times (E)$ 上の標準双線型形式を $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ で, (E) のノルムを $\|\cdot\|_p, p \in \mathbb{R}$, で表す。 (5) で与えられる $\phi \in (E)$ に対して,

$$\|\phi\|_p^2 = \|\Gamma(A)^p \phi\|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |(A^{\otimes n})^p f_n|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|_p^2.$$

このことから,

命題 1.2 (5) を $\phi \in (L^2)$ のウィナー・伊藤展開とする。 このとき, $\phi \in (E)$ となる必要十分条件は, 各 n に対して $f_n \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|_p^2 < \infty$ が任意の $p \geq 0$ で成り立つことである。

次に, ウィナー・伊藤展開をホワイトノイズ超関数に拡張しよう。 任意の $\Phi \in (E)^*$ に対して超関数の列 $F_n \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})_{\text{sym}}^*$ で

$$\langle\langle \Phi, \phi \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \langle F_n, f_n \rangle, \quad \phi \in (E), \quad \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle :x^{\otimes n}:, f_n \rangle, \quad (6)$$

となるものが一意的に存在する。 このとき,

$$\|\Phi\|_{-p}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |F_n|_{-p}^2, \quad p \geq 0,$$

が $\infty = \infty$ も許せば, 常に成り立つ。 実際は, 十分大きな全ての $p \geq 0$ に対して有限値となる。 逆に, 超関数の列 $F_n \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})_{\text{sym}}^*$ に対して, ある $p \geq 0$ が存在して, $\sum_{n=0}^{\infty} n! |F_n|_{-p}^2 < \infty$ となっていれば, (6) によって, ホワイトノイズ超関数 Φ が定まる。 このとき,

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle :x^{\otimes n}:, F_n \rangle$$

とかき, Φ のウィナー・伊藤展開と呼ぶ。 級数そのものは各点 $x \in E^*$ で意味を持たず, 適当なノルム $\|\cdot\|_{-p}$ 又は, $\phi \in (E)$ との標準双線型形式を通しての収束として理解する。

1.5 確率超過程としてのホワイトノイズ

まず, 基礎となる確率空間はガウス空間 (E^*, μ) であることを思い出しておこう。 確率変数 ϕ の平均値 (3) は, 真空ベクトル ϕ_0 を用いて,

$$\mathbf{E}(\phi) = \int_{E^*} \phi(x) \mu(dx) = \langle\langle \phi, \phi_0 \rangle\rangle \quad (7)$$

ともかける。 ところで, $(E)^*$ の元を超確率変数と呼ぶことに異論はないだろう。 $\phi_0 \in (E)$ なので, (7) によれば, 超確率変数 $\Phi \in (E)^*$ に対しても (積分による定義は無意味になるが) 平均値 $\mathbf{E}(\Phi)$ が定義される。

さて, $\xi \in H = L^2(\mathbb{R})$ に対して,

$$X_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle, \quad x \in E^*,$$

とおくと, X_ξ は (L^2) に属する確率変数になる. $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) = E \iff X_\xi \in (E)$ は, 命題 1.2 からわかる. 明らかに, 対応 $\xi \mapsto X_\xi$ は線型であり, 確率変数の族 $\{X_\xi; \xi \in L^2(\mathbb{R})\}$ は

$$\mathbf{E}(X_\xi) = 0, \quad \mathbf{E}(X_\xi X_\eta) = \langle \xi, \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\eta(t)dt, \quad (8)$$

をみたすガウス系 (任意有限一次結合 $a_1 X_{\xi_1} + \dots + a_n X_{\xi_n}$ の分布がガウス分布) となる. 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\delta_t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) = E^*$ なので,

$$\Phi_t(x) = \langle :x^{\otimes 1}:, \delta_t \rangle = \langle x, \delta_t \rangle$$

はホワイトノイズ超関数である (§1.4 の最後の議論を参照). $\Phi_t(x) = x(t)$ と書くのが便利である. こうして, 確率超過程 $\{x(t); t \in \mathbb{R}\} \subset (E)^*$ を得たが, これがホワイトノイズである. 形式的な変形

$$X_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \xi(t)x(t)dt \quad (9)$$

によっても, $x(t)$ の意味を伺い知ることができよう. (8) と見比べて, (1) の厳密な解釈が得られる. むろん, 第1式は正当な意味をもち, 第2式はシンボリックな表現である.

1.6 ブラウン運動

さて, やや天下りであるが,

$$B_t(x) = \langle x, 1_{[0,t]} \rangle, \quad x \in E^*, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

を考えよう. これは前節の $\{X_\xi\}$ の部分集合であり, 時間パラメータ t をもつのでガウス過程と呼ぶのがふさわしい. さらに

$$B_0 = 0, \quad \mathbf{E}(B_t) = 0, \quad \mathbf{E}(B_s B_t) = s \wedge t, \quad s, t \geq 0,$$

に注意して, $\{B_t; t \geq 0\}$ は原点 0 を出発点とするブラウン運動であることを知る. 軌跡 $t \mapsto B_t(x)$ の連続性を気にする向きには, コルモゴロフの連続化定理を適用して, 殆んどすべての $x \in E^*$ に対して軌跡は連続になっている (とりなおせる) ことを注意しておこう.

簡単な計算をしよう. $\phi \in (E)$ のウィナー・伊藤展開を $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle :x^{\otimes n}:, f_n \rangle$ とすると,

$$\langle B_t, \phi \rangle = \langle 1_{[0,t]}, f_1 \rangle = \int_0^t f_1(s)ds.$$

(仮定 $\phi \in (E)$ から $f_1 \in E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である.) よって,

$$\frac{d}{dt} \langle B_t, \phi \rangle = f_1(t) = \langle \delta_t, f_1 \rangle = \langle x(t), \phi \rangle, \quad \phi \in (E).$$

こうして、(2) は正当化され、 $x(t)$ はブラウン運動の時間微分とみなせる。

さらに、前節でも述べた形式的な記法 (9) を用いれば

$$B_t(x) = \int_0^t x(s) ds. \quad (11)$$

この意味については、§§3.1, 3.4 でもう一度振り返る。言い換えれば、(11) に厳密な意味をつけるための処方せんの一つがわれわれの超関数論 (ホワイトノイズ解析) なのである。

1.7 テスト関数の連続性

構成の仕方から、各 $\phi \in (E)$ は $L^2(E^*, \mu)$ の元として定まるので、 E^* 上ガウス測度に関して殆どいたるところ 0 という関数を加えても、元の関数と区別ができない。(この事情は、 A で $E = S(\mathbb{R})$ を構成する時も同様である。各 $\phi \in E$ に対して殆んど至るところ一致する急減少関数が一意的に存在することが証明される。) この点で、久保・横井の連続性定理 [21] は特に重要である。

定理 1.3 $\phi \in (E)$ のウィナー・伊藤展開を

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle :x^{\otimes n} :, f_n \rangle$$

とすると、この級数は各点 $x \in E^*$ で絶対収束し、 E^* 上の (強位相に関する) 連続関数になる。それは、 ϕ に対して、殆んど至るところ一致する唯一の連続関数である。

こうして、我々のホワイトノイズ・テスト関数は E^* 上の連続関数であって、そのウィナー・伊藤展開はノルム $|\cdot|_p$ に関してのみならず、各点でも絶対収束している。

2 積分核作用素と作用素の一般展開定理

この章ではホワイトノイズ解析の枠組:

$$(E) \subset (L^2) \cong \Gamma(H_C) \subset (E)^*$$

に沿った形で、フォック空間上の作用素論を紹介する (理論の詳細は [24], [25]). 我々の興味は (E) から $(E)^*$ 又は (E) からそれ自身への連続線型作用素にある。そのような作用素の全体を、それぞれ $\mathcal{L}((E), (E)^*)$, $\mathcal{L}((E), (E))$ で表す。フォック空間 $(L^2) \cong \Gamma(H_C)$ 上の有界作用素は全て $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ に含まれる。

2.1 生成・消滅作用素

まず $y \in E^*$ 方向の微分作用素 D_y を導入する:

$$D_y \phi(x) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \theta y) - \phi(x)}{\theta}, \quad x \in E^*, \quad \phi \in (E). \quad (12)$$

極限は常に存在し, D_y は (E) 上の連続線型作用素となる, 即ち, $D_y \in \mathcal{L}((E), (E))$ となることが証明される. 従って, その共役作用素は $(E)^*$ 上の連続線型作用素となる, すなわち, $D_y^* \in \mathcal{L}((E)^*, (E)^*)$. さて, 各点 $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\delta_t \in E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ を思い出して,

$$\partial_t = D_{\delta_t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

とおく. 場の量子論では, ∂_t, ∂_t^* は, それぞれ点 t における消滅作用素, 生成作用素と呼ばれている. ここで特に強調しておきたいことは, 通常フォック空間の理論ではそれらの場の作用素は (非有界) 作用素値超関数と理解されるのに対して, ホワイトノイズ解析では, ∂_t, ∂_t^* それ自身で連続作用素になっていることである. この特殊性は, まさにホワイトノイズ解析に特有なものであって, ∂_t はしばしば飛田の微分作用素と呼ばれている.

2.2 かけ算作用素

テスト・ホワイトノイズ関数の空間 (E) はかけ算に関して閉じている, という著しい性質を持つ. さらに, かけ算は (E) の位相に関して連続, すなわち, 双線型写像 $(E) \times (E) \ni (\phi, \psi) \mapsto \phi\psi \in (E)$ が連続なのである (久保・竹中). このことから, 超関数にテスト関数をかけ合わせるができる. $\Phi \in (E)^*$ と $\phi \in (E)$ に対して, $\Phi\phi = \phi\Phi \in (E)^*$ を

$$\langle\langle \Phi\phi, \psi \rangle\rangle = \langle\langle \Phi, \phi\psi \rangle\rangle, \quad \psi \in (E),$$

をみたす $(E)^*$ の元として定める. こうして $\Phi \in (E)^*$ は (E) から $(E)^*$ への連続線型作用素となる: $\Phi \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$. なお, $\Phi \in \mathcal{L}((E), (E)) \iff \Phi \in (E)$.

命題 2.1 ホワイトノイズはかけ算作用素として,

$$x(t) = \partial_t + \partial_t^*, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.3 積分核作用素

この節では, 形式的に

$$\Xi_{l,m}(\kappa) = \int_{\mathbb{R}^{l+m}} \kappa(s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_m) \partial_{s_1}^* \cdots \partial_{s_l}^* \partial_{t_1} \cdots \partial_{t_m} ds_1 \cdots ds_l dt_1 \cdots dt_m. \quad (13)$$

とかかれる作用素を定義する. まず, $\partial_{s_1}^* \cdots \partial_{s_l}^* \partial_{t_1} \cdots \partial_{t_m}$ は (E) から $(E)^*$ への連続線型作用素であることに注意しよう. よって, (13) はそのような作用素の連続的な和となっている. 正確な定義は次のようにする. まず $\phi, \psi \in (E)$ として \mathbb{R}^{l+m} 上の関数

$$\eta_{\phi, \psi}(s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_m) = \langle\langle \partial_{s_1}^* \cdots \partial_{s_l}^* \partial_{t_1} \cdots \partial_{t_m} \phi, \psi \rangle\rangle$$

が $E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m})$ に属することが示される. 従って, 任意の $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ に対して (E) 上の双線型形式 $(\phi, \psi) \mapsto \langle\kappa, \eta_{\phi, \psi}\rangle$ が定義されるのだが, これの連続性が証明され

る。一般のフレシェ空間で成り立つ同型 $\mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \cong \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}^*)$ を思い出せば、上の双線型形式は連続作用素で標準的に表示できる。その作用素を $\Xi_{l,m}(\kappa)$ と書く：

$$\langle\langle \Xi_{l,m}(\kappa)\phi, \psi \rangle\rangle = \langle \kappa, \eta_{\phi,\psi} \rangle, \quad \phi, \psi \in (E).$$

もう少し具体的に書くと、

$$\langle\langle \Xi_{l,m}(\kappa)\phi, \psi \rangle\rangle = \langle \kappa, \langle\langle \partial_{s_1}^* \cdots \partial_{s_l}^* \partial_{t_1} \cdots \partial_{t_m} \phi, \psi \rangle\rangle \rangle, \quad \phi, \psi \in (E).$$

従って、双線型形式の順序を形式的に入れ換えるなどすれば、積分表現 (13) は納得されよう。この作用素 $\Xi_{l,m}(\kappa)$ を κ を核超関数とする積分核作用素と呼ぶ ([14], [24], [25])。なお、類似の表現は様々な場面で議論されている (場の量子論では [5] 等; 数学では [17], [22] 等)。ノルム評価のために、

$$\rho = \lambda_0^{-1} = \|A^{-1}\|_{OP}, \quad \delta = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{-2} \right)^{1/2} = \|A^{-1}\|_{HS}$$

とおく。 $0 < \rho < 1$ と

$$|\xi|_p \leq \rho^q |\xi|_{p+q}, \quad \xi \in E, \quad p \in \mathbb{R}, \quad q \geq 0, \quad (14)$$

は様々な不等式評価のため重要であるが、本稿ではそれはあまり明らかではない。

定理 2.2 $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ とする。このとき、 $|\kappa|_{-p} < \infty$ をみたす任意の $p > 0$ に対して、

$$\|\Xi_{l,m}(\kappa)\phi\|_{-p} \leq \rho^{-p} (l!m!)^{1/2} \left(\frac{\rho^{-p}}{-2pe \log \rho} \right)^{(l+m)/2} |\kappa|_{-p} \|\phi\|_p, \quad \phi \in (E). \quad (15)$$

右辺が ∞ になることを許せば、(15) は任意の $p > 0$ で成り立つとしてよい。また、 $|\kappa|_{-p} < \infty$ となる $p > 0$ は必ず存在し、そのような p より大きな p に対しては常にそうである。

∂_i 同志, ∂_i^* 同志は互いに可換であるから、(13) における核超関数 κ の一意性はいえない。考えている超関数 κ は $l+m$ 変数であるので、前の l 変数、後ろの m 変数について別々に対称化したものを $s_{l,m}(\kappa)$ と書き、 $s_{l,m}(\kappa) = \kappa$ をみたす κ の全体を $(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})_{\text{sym}(l,m)}^*$ とかく。このとき、 $\Xi_{l,m}(\kappa) = \Xi_{l,m}(s_{l,m}(\kappa))$ は定義から明らか。また、 $\Xi_{l,m}(\kappa) = 0$ となるのは $s_{l,m}(\kappa) = 0$ のときに限ることもすぐわかる。さらに、自然な線型写像

$$\sum_{l,m=0}^{\infty} (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})_{\text{sym}(l,m)}^* \ni (\kappa_{l,m}) \mapsto \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$$

は単射になる。ここで、 $\sum_{l,m=0}^{\infty} (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})_{\text{sym}(l,m)}^*$ は代数的和、すなわち、 $(\kappa_{l,m})$ は有限個を除いて 0 としている。後ほど述べるが、この写像が全射に拡張され、全ての作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ が積分核作用素の和に分解されるのである (フォック展開)。

2.4 (E) 上の積分核作用素

前節では $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ に属する積分核作用素を一般に論じた. この節では, その特別な場合として $\mathcal{L}((E), (E))$ に属する作用素を考察する. また, $\mathcal{L}((E), (E))$ は非有界作用素を含む非可換作用素環の具体例としての興味もある.

ノルム評価のため記号を準備する. 簡単のため, $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_l)$ と $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m)$ に対して,

$$e(\mathbf{i}) = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_l}, \quad e(\mathbf{j}) = e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_m},$$

とおく. さて, $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ の新しいノルムを

$$|\kappa|_{l,m;p,q}^2 = \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} |\langle \kappa, e(\mathbf{i}) \otimes e(\mathbf{j}) \rangle|^2 |e(\mathbf{i})|_p^2 |e(\mathbf{j})|_q^2, \quad p, q \in \mathbb{R},$$

で定義する. $|\kappa|_p = |\kappa|_{l,m;p,p}$ となっている.

定理 2.3 $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ とするとき, $\Xi_{l,m}(\kappa) \in \mathcal{L}((E), (E)) \iff \kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*$. そのとき, 任意の $p \in \mathbb{R}$, $q > 0$ 及び $\alpha + \beta \leq 2q$ をみたす $\alpha, \beta > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \|\Xi_{l,m}(\kappa)\phi\|_p &\leq \rho^{-q/2} (l! m^m)^{1/2} \\ &\times \left(\frac{\rho^{-\alpha/2}}{-\alpha e \log \rho} \right)^{l/2} \left(\frac{\rho^{-\beta/2}}{-\beta e \log \rho} \right)^{m/2} |\kappa|_{l,m;p, -(p+q)} \|\phi\|_{p+q}, \quad \phi \in (E). \end{aligned} \quad (16)$$

が成り立つ.

先に述べた (15) は (16) でパラメーター p, q, α, β を特殊化して得られる. 上の評価式は, 後で述べるフォック展開の理論で本質的な役割を演ずるが, この論文では触れきれない ([24] 参照). なお,

$$\begin{aligned} \kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^* &\iff \text{ある } p \geq 0 \text{ に対して } |\kappa|_{-p} < \infty, \\ \kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^* &\iff \text{任意の } p \geq 0 \text{ に対して } |\kappa|_{l,m;p, -(p+q)} < \infty \\ &\text{となる } q \geq 0 \text{ が存在する,} \end{aligned}$$

は有用である. ちょっとした注意として, $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E)) \implies \Xi^* \in \mathcal{L}((E)^*, (E)^*)$. 従って,

命題 2.4 $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*$ ならば,

$$\int_{\mathbb{R}^{m+l}} \kappa(s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_m) \partial_{t_1}^* \dots \partial_{t_m}^* \partial_{s_1} \dots \partial_{s_l} dt_1 \dots dt_m ds_1 \dots ds_l$$

は $(E)^*$ 上の連続作用素に拡張される.

既に導入した D_y , $y \in E^*$, 及びその共役は積分核作用素の最も簡単な例を与える:

$$D_y = \Xi_{0,1}(y) = \int_{\mathbb{R}} y(t) \partial_t dt, \quad D_y^* = \Xi_{1,0}(y) = \int_{\mathbb{R}} y(s) \partial_s^* ds, \quad y \in E_{\mathbb{C}}^*.$$

特に,

$$\partial_t = \Xi_{0,1}(\delta_t), \quad \partial_t = \Xi_{1,0}(\delta_t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

さらに, 定理 2.3 によれば, $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ なる限り,

$$\Xi_{1,0}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \xi(s) \partial_s^* ds$$

は $\mathcal{L}((E), (E))$ に属し, 従って $\Xi_{0,1}(y) \in \mathcal{L}((E), (E))$, $y \in E_{\mathbb{C}}^*$, との交換関係が意味を持つ:

$$[\Xi_{0,1}(y), \Xi_{1,0}(\xi)] = \langle y, \xi \rangle I, \quad \xi \in E_{\mathbb{C}}, \quad y \in E_{\mathbb{C}}^*.$$

ここで I は (E) 上の恒等作用素である. こうして, いわゆる CCR (Canonical Commutation Relation) を得る:

$$[\partial_s, \partial_t] = 0, \quad [\partial_s^*, \partial_t^*] = 0, \quad [\partial_s, \partial_t^*] = \delta(s - t)I.$$

第 3 式はシンボリックな表現である.

2.5 作用素のシンボル

指数ベクトルがフォック空間の (ヒルベルト空間の位相に関して) 稠密部分空間を張ることは, 良く知られている. $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ ならば, 指数ベクトル ϕ_{ξ} が (E) に属することが示される. さらに, そのような指数ベクトルの全体 $\{\phi_{\xi}; \xi \in E_{\mathbb{C}}\}$ は (E) の稠密な部分空間を張ることが知られている. 従って, $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ に属する作用素は指数ベクトルに対する作用で一意的に定まり, よって, $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ に対して定義される $E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}}$ 上の関数

$$\hat{\Xi}(\xi, \eta) = \langle \Xi \phi_{\xi}, \phi_{\eta} \rangle, \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}, \quad (17)$$

は作用素を一意的に定める. この関数を Ξ のシンボルと呼ぶことにする ([6], [18]). 特に,

$$\hat{\Xi}(0, 0) = \langle \Xi \phi_0, \phi_0 \rangle$$

は Ξ の真空期待値と呼ばれ, しばしば重要である. 例えば, 積分核作用素に対しては,

$$\widehat{\Xi_{l,m}}(\kappa)(\xi, \eta) = \langle \kappa, \eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m} \rangle e^{\langle \xi, \eta \rangle}, \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}, \quad \kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*. \quad (18)$$

よって,

$$\hat{\partial}_t(\xi, \eta) = \xi(t) e^{\langle \xi, \eta \rangle}, \quad \hat{\partial}_t^*(\xi, \eta) = \eta(t) e^{\langle \xi, \eta \rangle}, \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

さて, いささか唐突であるが, 関数 $\Theta: E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して次の性質を考えよう:

(O1) (正則性) $\xi, \xi_1, \eta, \eta_1 \in E_{\mathbb{C}}$ を任意に固定するとき, 2 変数複素関数

$$z, w \mapsto \Theta(z\xi + \xi_1, w\eta + \eta_1), \quad z, w \in \mathbb{C},$$

は $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上で正則である;

(O2) (増大度) 定数 $C \geq 0$, $K \geq 0$, $p \in \mathbb{R}$ があって,

$$|\Theta(\xi, \eta)| \leq C \exp K (|\xi|_p^2 + |\eta|_p^2), \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

(O2') (増大度) 任意の $p \geq 0$, $\epsilon > 0$ に対して, 定数 $C \geq 0$, $q \geq 0$ が存在して

$$|\Theta(\xi, \eta)| \leq C \exp \epsilon (|\xi|_{p+q}^2 + |\eta|_{-p}^2), \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

明らかに, $(O2') \Rightarrow (O2)$. 簡単な検証で, $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ 又は $\mathcal{L}((E), (E))$ に属する作用素 Ξ のシンボル $\Theta = \hat{\Xi}$ は (O1), (O2) 又は (O1), (O2') をみたす. ここで重要なことは, 上述した性質は作用素のシンボルを特徴づけることにある. ([23] で部分的に議論され, [24] で証明が完成した.)

定理 2.5 $E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}}$ 上の複素数値関数 Θ が性質 (O1), (O2) をみたしているとする. このとき核超関数 $\kappa_{l,m} \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})_{\text{sym}(l,m)}^*$ が一意的に存在して,

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \langle \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \phi_{\xi}, \phi_{\eta} \rangle, \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}. \quad (19)$$

さらに, 級数

$$\Xi \phi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \phi, \quad \phi \in (E), \quad (20)$$

は $(E)^*$ の中でその位相に関して収束し, (20) 式で定義される作用素 Ξ は $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ に属し, $\hat{\Xi} = \Theta$. さらに, 上の Θ が条件 (O2') をみたせば, 核超関数 $\kappa_{l,m}$ は $((E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*)_{\text{sym}(l,m)} = (E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})_{\text{sym}}^*$ に属し, 級数 (20) は (E) で収束し, $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E))$.

2.6 シンボルの特徴づけ定理による作用素の定義

指数ベクトルは一次独立であって, フォック空間の稠密部分空間を張ることから, フォック空間上の作用素を考える時, しばしば指数ベクトル上の作用だけを扱っている. 代数的な議論はこれで十分なことも多いようであるが, 関数解析的取り扱いのためには, 作用素の連続性・自己共役性 (単なる対称性ではない) などが直ちに問題となり, そのためには, 考えている作用素の定義域が指数ベクトルの張る代数的部分空間からどの程度拡張されるか? が基本的な問題となる. 前節のシンボルの特徴づけ定理は, この問いに対する一つのアプローチになっている. ここでは計算の実例として, 量子的ボワソン過程 ([16], [26]) に関係する作用素を導入してみよう (なお §3.4 も参照のこと). その他の例については, [23], [24] で組織的に議論されている.

$l \geq 0$ を定数, f を \mathbb{R} 上の適当な関数として作用素 V_f を

$$V_f \phi_{\xi} = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (l(e^{if(s)} - 1) + \sqrt{l}(e^{if(s)} - 1)\xi(s)) ds \right\} \phi_{e^{if}\xi + \sqrt{l}(e^{if}-1)}, \quad \xi \in E_{\mathbb{C}},$$

で定義することを考えよう. 既に述べたように, V_f は指数ベクトルの張るフォック空間の部分空間上で矛盾なく定義される線型作用素となる. 我々の特徴づけ定理を用いれば, そ

のように定義された作用素が我々の枠組みに乗るかどうか判定できる. 具体的には, まずシンボルに当たる関数を計算する.

$$\begin{aligned}
\Theta(\xi, \eta) &= \\
&= \langle\langle V_f \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle \\
&= \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (l(e^{if(s)} - 1) + \sqrt{l}(e^{if(s)} - 1)\xi(s)) ds \right\} e^{\langle e^{if}\xi + \sqrt{l}(e^{if}-1), \eta \rangle} \\
&= \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (l(e^{if(s)} - 1) + \sqrt{l}(e^{if(s)} - 1)(\xi(s) + \eta(s)) + e^{if(s)}\xi(s)\eta(s)) ds \right\} \\
&= e^{\langle \xi, \eta \rangle} \times \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{if(s)} - 1)(\sqrt{l} + \xi(s))(\sqrt{l} + \eta(s)) ds \right\}. \tag{21}
\end{aligned}$$

積分が絶対収束する限りは, ξ, η に関する正則性は自明である. 有界性のために, 補題を述べておこう.

補題 2.6 任意の $K_1, K_2 \geq 0, p \geq 0, \epsilon > 0$ に対して, 適当な $q \geq 0$ をとれば,

$$K_1 |\langle \xi, \xi \rangle| + K_2 |\langle \xi, \eta \rangle| \leq \epsilon (|\xi|_{p+q}^2 + |\eta|_{-p}^2), \quad \xi, \eta \in E_C.$$

証明 まず, 任意の $q \geq 0, \gamma > 0$, に対して成り立つ不等式に注意しよう.

$$\begin{aligned}
K_1 |\langle \xi, \xi \rangle| + K_2 |\langle \xi, \eta \rangle| &\leq K_1 |\xi|_{p+q} |\xi|_{-(p+q)} + K_2 |\xi|_p |\eta|_{-p} \\
&\leq K_1 \rho^{2(p+q)} |\xi|_{p+q}^2 + \frac{K_2}{2} \left(\gamma^2 |\xi|_p^2 + \frac{1}{\gamma^2} |\eta|_{-p}^2 \right) \\
&\leq \left(K_1 \rho^{2p} + \frac{K_2 \gamma^2}{2} \right) \rho^{2q} |\xi|_{p+q}^2 + \frac{K_2}{2\gamma^2} |\eta|_{-p}^2.
\end{aligned}$$

ここで, (14) を用いた. $0 < \rho < 1$ なので (§2.2), $\gamma > 0, q \geq 0$ を上手に選んで,

$$\frac{K_2}{2\gamma^2} < \epsilon, \quad \left(K_1 \rho^{2p} + \frac{K_2 \gamma^2}{2} \right) \rho^{2q} < \epsilon,$$

とできるから, 主張は証明された.

証明終

同様にして,

補題 2.7 $a \in E_C^*, b \in E_C$ とする. このとき, 任意の $K_1, K_2 \geq 0, p \geq 0, \epsilon > 0$ に対して, ある $C \geq 0, q \geq 0$ が存在して,

$$K_1 |\langle a, \xi \rangle| + K_2 |\langle b, \eta \rangle| \leq C + \epsilon (|\xi|_{p+q}^2 + |\eta|_{-p}^2), \quad \xi, \eta \in E_C,$$

とできる.

これらの補題と $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies e^{if} - 1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を考え併せて, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ なる限り, Θ は有界性の条件 (O2') をみたすことがわかる. ここで定理 2.5 を適用して, Θ は $\mathcal{L}((E), (E))$

に属するある作用素のシンボルになっていることがわかる. その作用素の指数ベクトル上の作用は, はじめに与えたものに他ならないから, 上で定義した V_f は, (E) 上の作用素に連続的に拡張されることが証明された. この拡張も同じ記号で表す.

また, $e^{if} - 1$ が可積分なら (O2) が従い, $V_f \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ であることはすぐわかる. 一方, 別の議論から f が局所有界ならば, V_f は (L^2) 上のユニタリー作用素であることがわかる. いずれにせよ, 真空期待値は,

$$\langle\langle V_f \phi_0, \phi_0 \rangle\rangle = \exp \left\{ l \int_{-\infty}^{\infty} (e^{if(s)} - 1) ds \right\}.$$

これは, intensity l のポワソン過程に関する f の確率積分の特性関数である.

2.7 フォック展開

作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ のシンボルは (O1) と (O2) をみたすので, 定理 2.5 によって, Ξ が積分核作用素で再構成される. $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E))$ についても同様であり, 次の定理が成り立つ.

定理 2.8 任意の $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ に対して核超関数 $\kappa_{l,m} \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})_{\text{sym}(l,m)}^*$ が一意的に存在して,

$$\Xi \phi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \phi, \quad \phi \in (E), \quad (22)$$

が成り立つ. ここで級数 (22) は $(E)^*$ の位相で収束する. もし $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E))$ ならば, $\kappa_{l,m} \in ((E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*)_{\text{sym}(l,m)} = (E_{\mathbb{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})_{\text{sym}}^*$ であって, 級数は (E) で収束する.

こうして得られた $\Xi \in \mathcal{L}((E), (E)^*)$ の積分核作用素による分解 (22) をフォック展開と呼ぶ. Ξ のフォック展開 (22) が与えられたとき, 両辺のシンボルを求めると,

$$e^{-(\xi, \eta)} \hat{\Xi}(\xi, \eta) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \langle \kappa_{l,m}, \eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m} \rangle, \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}. \quad (23)$$

従って, 与えられた作用素のフォック展開を求めるためには, $e^{-(\xi, \eta)} \hat{\Xi}(\xi, \eta)$ のテイラー展開を求めればよい.

ついでながら, (L^2) 上の有界作用素は, その定義域を (E) に限れば $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ に属するので, フォック展開可能である. しかしながら, その収束はヒルベルト空間の作用素ノルムの範囲では論じられない. この関連で注意を喚起するために,

命題 2.9 $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ とする. もし $\Xi_{l,m}(\kappa)$ が (L^2) 上の有界作用素に拡張されれば, $s_{l,m}(\kappa) = 0$ 又は $l = m = 0$. 言い換えれば, スカラー作用素以外の積分核作用素は (L^2) 上の有界作用素にはなり得ない.

これは, 積分核作用素が生成・消滅演算子の合成であり, 非有界作用素になっていることの現れである. 従って, スカラーではない (L^2) 上の有界作用素のフォック展開は常に無限級数である.

3 量子確率解析に向けて

これまでの議論からわかるように、ホワイトノイズ解析を基盤としたガウス空間上の作用素論の特徴は smear しない生成・消滅作用素の効果的な利用にあった。その点に注意しながら、量子確率解析に関連する話題について述べてみたい。一部の議論はまだ厳密性を欠くが、今後の発展を期待しつつ目下研究中である。

3.1 伊藤積分・櫃田-スコロホド積分

ホワイトノイズ解析の枠組みで確率積分について簡単に触れておく (なお、この節の内容については [13] 参照)。まず、各 t に対して、 $\partial_t^* \in \mathcal{L}((E)^*, (E)^*)$ であることを思い出し、 $t \mapsto \langle \partial_t^* \Phi_t, \phi \rangle$ が可測関数となる。

補題 3.1 確率超過程 $\{\Phi_t; t \geq 0\}$ が次の条件をみたしていると仮定する: 任意の $\phi \in (E)$ に対して、 $t \mapsto \langle \partial_t^* \Phi_t, \phi \rangle$ が可測関数となり、

$$\int_0^t |\langle \partial_s^* \Phi_s, \phi \rangle| ds < \infty, \quad t \geq 0.$$

このとき、確率超過程 $\{\Psi_t; t \geq 0\}$ で

$$\langle \Psi_t, \phi \rangle = \int_0^t \langle \partial_s^* \Phi_s, \phi \rangle ds, \quad \phi \in (E),$$

をみたすものが一意的存在する。

上の補題で得られた Ψ_t を

$$\Psi_t = \int_0^t \partial_s^* \Phi_s ds$$

とかいて 櫃田-スコロホド積分と呼ぶ。もともとは、1970 年代前半に伊藤積分の拡張として、ホワイトノイズ解析とは独立に導入されたものである。

我々のブラウン運動は、(10) で導入されている。このブラウン運動から σ -field のフィルトレーションが自然に定義される: $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s; 0 \leq s \leq t\}$ 。さて、確率過程 $\{\phi_t; t \geq 0\}$ が (i) adapted, すなわち、各 t に対して ϕ_t が \mathcal{F}_t -可測; かつ (ii) L^2 -条件

$$\int_0^t \|\phi_s\|_0^2 ds < \infty, \quad t > 0;$$

をみたしていれば、いわゆる伊藤積分:

$$\int_0^t \phi_s dB_s$$

が定義される ([30] 等を参照)。実は、

定理 3.2 上のような確率過程 $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ に対しては, 伊藤積分と櫃田-スコロホド積分は一致する:

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \int_0^t \partial_s^* \phi_s ds.$$

この結果は久保・竹中 [20] によって得られた. こうして, 櫃田-スコロホド積分は, 確かに伊藤積分の拡張になっている. 特に, $\phi_s(x) \equiv 1$ を考えよう. 伊藤積分はよく知られているように,

$$\int_0^t 1 dB_s = B(t). \quad (24)$$

一方, $\partial_s^* \phi_s(x) = \langle x, \delta_s \rangle = x(s)$ なので,

$$\int_0^t \partial_s^* 1 ds = \int_0^t x(s) ds. \quad (25)$$

定理 3.2 によれば (24) と (25) は一致するわけで, (11) に確率積分としての意味がついた.

ついでに, 久保 [19] によって得られた伊藤公式 (の拡張) を述べておこう. まず, $X \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して, $X(B(t))$ が $(E)^*$ の元として近似などの議論によって定義される ([13]). X' で超関数としての微分を表せば, $X'(B(t))$ などが次々と定義される.

定理 3.3 $X \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して,

$$X(B(t)) - X(B(s)) = \int_s^t \partial_u^* X'(B(u)) du + \frac{1}{2} \int_s^t X''(B(u)) du, \quad 0 \leq s \leq t.$$

3.2 条件付き期待値

$\phi \in (L^2)$ のウィナー・伊藤展開が

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle :x^{\otimes n}:, f_n \rangle$$

で与えられているとき,

$$E_t \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle :x^{\otimes n}:, f_n 1_{[0,t]}^{\otimes n} \rangle$$

によって定義される E_t は (L^2) 上の有界作用素 (実は, 射影作用素) になる. E_t が \mathcal{F}_t に関する条件付き期待値に一致することは, 見やすい: $E_t \phi = \mathbb{E}(\phi | \mathcal{F}_t)$. また, E_t は指数ベクトルに対する作用:

$$E_t \phi_\xi = \phi_{\xi 1_{[0,t]}}, \quad \xi \in E_{\mathbb{C}}, \quad (26)$$

によっても特徴づけられる. シンボルは,

$$\widehat{E}_t(\xi, \eta) = \langle E_t \phi_\xi, \phi_\eta \rangle = \exp \left(\int_0^t \xi(u) \eta(u) du \right), \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

3.3 クラーク公式

次に, $t \geq 0$ に対して作用素

$$M_t = \int_0^t \partial_s^* E_s \partial_s ds \quad (27)$$

を定義したい. これもシンボルに当たる関数を求めよう.

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \eta) &\equiv \int_0^t \langle \partial_s^* E_s \partial_s \phi_\xi, \phi_\eta \rangle ds \\ &= \int_0^t \xi(s) \eta(s) \langle E_s \phi_\xi, \phi_\eta \rangle ds \\ &= \int_0^t \xi(s) \eta(s) \exp \left(\int_0^s \xi(u) \eta(u) du \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} \exp \left(\int_0^s \xi(u) \eta(u) du \right) ds \\ &= \exp \left(\int_0^t \xi(u) \eta(u) du \right) - 1 \\ &= \langle E_t \phi_\xi, \phi_\eta \rangle - \mathbf{E}(\phi_\xi) \langle \phi_0, \phi_\eta \rangle. \end{aligned}$$

すると, Θ は作用素

$$M_t \phi = E_t \phi - \mathbf{E}(\phi) \phi_0, \quad \phi \in (E),$$

のシンボルであることがわかる. これによって (27) の定義とする. $t = \infty$ でも同様に, 次の公式に到達する:

$$E_t \phi = \mathbf{E}(\phi) + \left(\int_0^t \partial_s^* E_s \partial_s ds \right) \phi, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

さらに, 櫃田-スコロホド積分の定義と前節の定理 3.2 を用いて,

$$\left(\int_0^t \partial_s^* E_s \partial_s ds \right) \phi = \int_0^t \partial_s^* E_s \partial_s \phi ds = \int_0^t E_s \partial_s \phi dB_s.$$

こうしてクラーク公式と呼ばれているものの一つの表現を得た:

$$E_t \phi = \mathbf{E}(\phi) + \int_0^t E_s \partial_s \phi dB_s, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

同様の議論で,

$$\phi = \mathbf{E}(\phi) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \partial_s^* E_s \partial_s ds \right) \phi$$

が従う. この場合, 右辺の作用素は $\mathcal{L}((E), (E))$ に属するので, その共役は $\mathcal{L}((E)^*, (E)^*)$ に属する作用素になる. しかも, シンボルの対称性からわかるが, その共役作用素は元の作用素の拡張である. こうして,

$$\Phi = \mathbf{E}(\Phi) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \partial_s^* E_s \partial_s ds \right) \Phi, \quad \Phi \in (E)^*.$$

これはクラーク公式の一つの拡張であり, 渡辺寿夫氏の議論 [29] への作用素論からの注意となっている.

3.4 量子確率過程

一般に、フォック空間上の作用素の族が時間パラメータ t をもつとき (言葉の乱用ではあるが) 量子確率過程と呼ぶ。基本的な例を積分核作用素の形で挙げよう。

$$A_t = \int_0^t \partial_s ds, \quad A_t^* = \int_0^t \partial_s^* ds, \quad \Lambda_t = \int_0^t \partial_s^* \partial_s ds.$$

は順に、消滅過程, 生成過程, 個数 (ゲージ) 過程と呼ばれ, ハドソン-パーササラシ他の議論では, 基本的役割を担っている。

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_s^* \partial_s ds$$

はフォック空間上の個数作用素に他ならない。

さて,

$$Q_t = A_t + A_t^* = \int_0^t (\partial_s + \partial_s^*) ds \quad t \geq 0,$$

を量子的ブラウン運動とよぶ。 $\partial_s + \partial_s^* = x(s)$ を思い出す (命題 2.1) と, (11) に作用素としての意味づけをしたことになる。 Q_t を真空ベクトルに作用させると, (古典的) 確率過程を得るがそれは, ブラウン運動に他ならない:

$$Q_t \phi_0(x) = \langle x, 1_{[0,t]} \rangle = B_t(x), \quad x \in E^*, \quad t \geq 0.$$

また, 量子的ポワソン過程は,

$$P_t = \Lambda_t + \sqrt{l} Q_t + lt = \int_0^t (\partial_s^* \partial_s + \sqrt{l} (\partial_s^* + \partial_s) + l) ds,$$

で与えられる。ここに, $l \geq 0$ は定数である。 §2.6 で定義した V_f で, 特に, $f = \alpha 1_{[0,t]}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) を考えてみよう。簡単のために, 対応する作用素を V_t^α とかく。(21) から,

$$\widehat{V}_t^\alpha(\xi, \eta) = e^{\langle \xi, \eta \rangle} \times \exp \left\{ \int_0^t (e^{i\alpha} - 1)(\sqrt{l} + \xi(s))(\sqrt{l} + \eta(s)) ds \right\}.$$

よって,

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \widehat{V}_t^\alpha(\xi, \eta) = e^{\langle \xi, \eta \rangle} \int_0^t i(\sqrt{l} + \xi(s))(\sqrt{l} + \eta(s)) ds = i\widehat{P}_t(\xi, \eta).$$

言い換えれば,

$$P_t = -i \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} V_t^\alpha.$$

3.5 Adapted 性

量子確率過程においても adapted という概念は重要である。超関数的なものも議論したいので作用素のシンボルを用いて定義しよう。まず,

$$\mathcal{N}_t = \{ \xi \in E_{\mathbb{C}}; \xi(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq t \}$$

とおく. \mathcal{N}_t は $E_{\mathbb{C}}$ の閉部分空間となる. 量子確率過程 $\{\Xi_t; t \geq 0\}$ が adapted とは, $E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}}$ 上の関数 $(\xi, \eta) \mapsto e^{-(\xi, \eta)} \widehat{\Xi}_t(\xi, \eta)$ が変換 $\xi \rightarrow \xi + \xi_1, \eta \rightarrow \eta + \eta_1$ ($\xi_1, \eta_1 \in \mathcal{N}_t$) で不変なときをいう. 前節に挙げた例はみな adapted である. 実際,

$$e^{-(\xi, \eta)} \widehat{A}_t(\xi, \eta) = \langle 1_{[0, t]}, \xi \rangle, \quad e^{-(\xi, \eta)} \widehat{A}_t^*(\xi, \eta) = \langle 1_{[0, t]}, \eta \rangle,$$

$$e^{-(\xi, \eta)} \widehat{\Lambda}_t(\xi, \eta) = \int_0^t \xi(s) \eta(s) ds.$$

別の例として, $\phi \in (E)$ に対して, $\{\Psi_t = E_t \phi; t \geq 0\}$ はかけ算作用素のなす adapted な量子確率過程である.

命題 3.4 $\{\Xi_t; t \geq 0\} \subset \mathcal{L}((E), (E)^*)$ を量子確率過程とし, そのフォック展開を

$$\Xi_t = \sum_{l, m=0}^{\infty} \Xi_{l, m}(\kappa_{l, m}(t)),$$

とする. このとき, $\{\Xi_t; t \geq 0\}$ が adapted $\iff \text{supp}(\kappa_{l, m}(t)) \subset [0, t]^{l+m}$.

証明 仮定から,

$$e^{-(\xi, \eta)} \widehat{\Xi}_t(\xi, \eta) = \sum_{l, m=0}^{\infty} \langle \kappa_{l, m}(t), \eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m} \rangle$$

は変換 $\xi \rightarrow \xi + \xi_1, \eta \rightarrow \eta + \eta_1$ ($\xi_1, \eta_1 \in \mathcal{N}_t$) で不変である. したがって, 各項もそうであり, $\text{supp}(\kappa_{l, m}(t)) \subset [0, t]^{l+m}$. 逆も明らか. 証明終

さて, $m \geq 1$ として $\text{supp}(\kappa_{l, m}(t)) \subset [0, t]^{l+m}$ を核超関数とする積分核作用素を考えよう.

$$\begin{aligned} \Xi_{l, m}(\kappa_{l, m}(t)) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^{l+m}} \kappa_{l, m}(s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_m; t) \partial_{s_1}^* \dots \partial_{s_l}^* \partial_{t_1} \dots \partial_{t_m} ds_1 \dots ds_l dt_1 \dots dt_m \\ &= \int_0^t \left(\int_{[0, t]^{l+m-1}} \kappa_{l, m}(s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_{m-1}, u; t) \right. \\ &\quad \left. \times \partial_{s_1}^* \dots \partial_{s_l}^* \partial_{t_1} \dots \partial_{t_{m-1}} ds_1 \dots ds_l dt_1 \dots dt_{m-1} \right) \partial_u du. \end{aligned}$$

そこで, カッコ内の作用素を $F(t, u)$ とおけば,

$$\Xi_{l, m}(\kappa_{l, m}(t)) = \int_0^t F(t, u) \partial_u du \quad (28)$$

を得る. $0 \leq u \leq t$ 以外では $F(t, u) = 0$, かつ t に関して adapted である. $m = 0$ のときは ∂_u の代わりに ∂_u^* を用いる. この議論は, 核超関数が局所可積分関数のようなふつうの関数なら問題ないが, 超関数の場合は厳密さに欠ける. 問題は $F(t, u)$ が作用素値超関数になるのでそれに対する adapted 性をどのように定式化し積分 (28) を意味づけるかである. このあたりの量子確率“超”過程の問題がクリアーされれば, フォック展開によって adapted 量子確率過程の表現を得たことになる. すなわち, 厳密さにやや欠けるが,

定理 3.5 adapted な量子確率過程 $\{\Xi_t; t \geq 0\}$ は別の adapted な量子確率 (超) 過程 $\{F(t, u); 0 \leq u \leq t\}, \{G(t, u); 0 \leq u \leq t\}$ を用いて,

$$\Xi_t = \int_0^t F(t, u) \partial_u du + \int_0^t G(t, u) \partial_u^* du + I(t)$$

と表現できる. ここでは $I(t)$ はスカラー作用素である.

3.6 量子的マルチンゲール

$\Xi \in \mathcal{L}((E), (E))$ に対して,

$$\Theta_t(\xi, \eta) = \hat{\Xi}(\xi 1_{[0, t]}, \eta 1_{[0, t]}), \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}},$$

とおく. これが $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ のある作用素のシンボルになっているとき, それを $E_t(\Xi)$ とかいて Ξ の条件付き真空期待値という. 定義より,

$$E_t(\Xi) = E_t^* \Xi E_t, \quad t \geq 0.$$

明らかに, $\{\Xi_t = E_t(\Xi); t \geq 0\}$ は adapted 量子確率過程であるが, さらに

$$E_s(\Xi_t) = \Xi_s, \quad 0 \leq s \leq t.$$

このような性質を持つ量子確率過程を量子的マルチンゲールと呼ぼう. これは, [27] など
で議論されているフォック空間上の有界作用素のなすマルチンゲールの拡張になっている.
簡単な例として, 量子的ブラウン運動 $\{Q_t; t \geq 0\}$ がある.

定理 3.5 から次の表現定理が予想される. 実際, 積分核が超関数でなくふつうの関数なら正しい.

定理 3.6 量子的マルチンゲール $\{\Xi_t; t \geq 0\} \subset \mathcal{L}((E), (E)^*)$ は適当な adapted 量子確率 (超) 過程 $\{G_t; t \geq 0\}, \{H_t; t \geq 0\}$ によって

$$\Xi_t = \int_0^t G_s \partial_s ds + \int_0^t H_s \partial_s^* ds$$

と表現できる.

3.7 量子的伊藤公式

量子確率過程はフォック空間上の作用素であるから, しばしば合成法則 = 量子的伊藤公式は重要である. ハドソン-パーササラシイ [16] によって (数学では) 初めて定式化され ([22], [26] も見よ), ベラフキン [4] によって一般化された. ホワイトノイズを用いた定式化と一般化は, ファン [15] によってやや形式的ではあるが議論されている. いわゆる伊藤テーブルは, $dt, dA_t, dA_t^*, d\Lambda_t$ の合成法則をまとめたものに他ならない:

$$dA_t dA_t^* = dt, \quad dA_t d\Lambda_t = dA_t, \quad d\Lambda_t dA_t^* = dA_t^*, \quad d\Lambda_t d\Lambda_t = d\Lambda_t. \quad (29)$$

ほかの組み合わせは全て 0. 作用素の確率積分 (adapted な量子確率過程の生成・消滅過程に関する) を述べるには準備が足りないので, ここでは,

$$dA_t^* dA_t = 0, \quad dA_t dA_t^* = dt, \quad (30)$$

のシンボルによる簡単な説明にとどめておく.

まず,

$$\widehat{A_t^* A_t}(\xi, \eta) = \langle\langle A_t^* A_t \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle = \langle\langle A_t \phi_\xi, A_t \phi_\eta \rangle\rangle = \langle 1_{[0,t]}, \xi \rangle \langle 1_{[0,t]}, \eta \rangle e^{\langle \xi, \eta \rangle}.$$

また,

$$\widehat{A_t A_t^*}(\xi, \eta) = \langle\langle A_t A_t^* \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle = \langle\langle A_t^* \phi_\xi, A_t^* \phi_\eta \rangle\rangle.$$

ここで公式

$$D_y^* \phi_\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n+1} :, \frac{1}{n!} \xi^{\otimes n} \hat{\otimes} y \right\rangle$$

を用いれば,

$$\begin{aligned} \widehat{A_t A_t^*}(\xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \left\langle \frac{1}{n!} \xi^{\otimes n} \hat{\otimes} 1_{[0,t]}, \frac{1}{n!} \eta^{\otimes n} \hat{\otimes} 1_{[0,t]} \right\rangle \\ &= t + \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)!}{n!n!} \frac{1}{n+1} \left(\langle \xi, \eta \rangle^n t + n \langle 1_{[0,t]}, \xi \rangle \langle 1_{[0,t]}, \eta \rangle \langle \xi, \eta \rangle^{n-1} \right) \\ &= t e^{\langle \xi, \eta \rangle} + \langle 1_{[0,t]}, \xi \rangle \langle 1_{[0,t]}, \eta \rangle e^{\langle \xi, \eta \rangle}. \end{aligned}$$

したがって, $A_t^* A_t$ と $A_t A_t^*$ のフォック展開は,

$$\begin{aligned} A_t^* A_t &= \Xi_{1,1}(1_{[0,t]} \otimes 1_{[0,t]}) = \int_0^t \int_0^t \partial_u^* \partial_v du dv, \\ A_t A_t^* &= \Xi_{0,0}(t) + \Xi_{1,1}(1_{[0,t]} \otimes 1_{[0,t]}) = \int_0^t ds + \int_0^t \int_0^t \partial_u^* \partial_v du dv. \end{aligned}$$

ここで積分を 2 つの領域 $\{0 \leq u \leq v \leq 1\}$ と $\{0 \leq v \leq u \leq 1\}$ に分ければ,

$$\int_0^t \int_0^t \partial_u^* \partial_v du dv = \int_0^t A_u \partial_u^* du + \int_0^t A_v^* \partial_v dv = \int_0^t A_u dA_u^* + \int_0^t A_v^* dA_v$$

こうして, 上のフォック展開から

$$d(A_t^* A_t) = A_t^* dA_t + A_t dA_t^*, \quad d(A_t A_t^*) = A_t^* dA_t + A_t dA_t^* + dt.$$

これが (30) の内容である. ところで, 我々の超関数論を用いれば, (29) の他の公式は (30) から導かれる ([15]).

参考文献

- [1] L. Accardi, et al. (Eds.): "Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes," Lect. Notes in Math. Vol. 1055, Springer-Verlag, 1984; "Quantum Probability and Applications II-V," Lect. Notes in Math. Vol. 1136, 1985; Vol. 1303, 1988; Vol. 1396, 1989; Vol. 1442, 1990; "Quantum Probability and Related Topics Vol. VI-VIII," World Scientific, 1991, 1992, 1993.
- [2] 有光敏彦・斉藤 健: 量子確率微分方程式の系統的体系, 物性研究 59-2 (1992), 213-233.
- [3] T. Arimitsu: A canonical formalism of non-equilibrium and dissipative quantum systems - A unified framework of quantum stochastic differential equations, preprint, 1993.
- [4] V. P. Belavkin: *A quantum nonadapted Ito formula and stochastic analysis in Fock scale*, J. Funct. Anal. 102 (1991), 414-447.
- [5] F. A. Berezin: "The Method of Second Quantization," Academic Press, 1966.
- [6] F. A. Berezin: *Wick and anti-Wick operator symbols*, Math. Sbornik 15 (1971), 577-606.
- [7] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, and I. T., Todorov: "Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory," Benjamin, 1975.
- [8] C. W. Gardiner: "Quantum Noise," Springer-Verlag, 1991.
- [9] I. M. Gelfand and N. Ya. Vilenkin: "Generalized Functionals," Vol. 4, Academic Press, 1964.
- [10] T. Hida: "Analysis of Brownian Functionals," Carleton Math. Lect. Notes, no. 13, Carleton University, Ottawa, 1975.
- [11] T. Hida: "Brownian Motion," Springer-Verlag, 1980 (未増補原著: 岩波書店).
- [12] T. Hida, H.-H. Kuo, and N. Obata: *Transformations for white noise functionals*, J. Funct. Anal. 111 (1993), 259-277.
- [13] T. Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff, and L. Streit: "White Noise," Kluwer Academic, 1993.
- [14] T. Hida, N. Obata, and K. Saitô: *Infinite dimensional rotations and Laplacians in terms of white noise calculus*, Nagoya Math. J. 128 (1992), 65-93.
- [15] Z. Huang: *Quantum white noises - White noise approach to quantum stochastic calculus*, Nagoya Math. J. 129 (1993), 23-42.

- [16] R. L. Hudson and K. R. Parthasaraty: *Quantum Ito's formula and stochastic evolutions*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 301–323.
- [17] P. Krée: *La théorie des distributions en dimension quelconque et l'intégration stochastique*, in “Stochastic Analysis and Related Topics,” (H. Korezlioglu and A. S. Ustunel, Eds.), pp. 170–233, Lect. Notes in Math. Vol. 1316, Springer-Verlag, 1988.
- [18] P. Krée and R. Rączka: *Kernels and symbols of operators in quantum field theory*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. **A28** (1978), 41–73.
- [19] I. Kubo: *Ito formula for generalized Brownian functionals*, in “Theory and Application of Random Fields (G. Kallianpur ed.),” pp. 156–166, Lect. Notes in Math. Vol. 49, Springer-Verlag, 1983.
- [20] I. Kubo and S. Takenaka: *Calculus on Gaussian white noise I–IV*, Proc. Japan Acad. **56A** (1980), 376–380; 411–416; **57A** (1981), 433–437; **58A** (1982), 186–189.
- [21] I. Kubo and Y. Yokoi: *A remark on the space of testing random variables in the white noise calculus*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 139–149.
- [22] P. A. Meyer: “Quantum Probability for Probabilists,” Lect. Notes in Math. Vol. 1538, Springer-Verlag, 1993.
- [23] N. Obata: *An analytic characterization of symbols of operators on white noise functionals*, J. Math. Soc. Japan, **45** (1993), 421–445.
- [24] N. Obata: “Elements of White Noise Calculus,” Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, to be published.
- [25] N. Obata: *Operator calculus on vector-valued white noise functionals*, to appear in J. Funct. Anal. **119** (1994).
- [26] K. R. Parthasarathy: “An Introduction to Quantum Stochastic Calculus,” Birkhäuser, 1993.
- [27] K. R. Parthasarathy and K. B. Sinha: *Stochastic integral representation of bounded quantum martingales in Fock space*, J. Funct. Anal. **67** (1986), 126–151.
- [28] F. Trèves: “Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels,” Academic Press, 1967 (邦訳: 吉岡書店).
- [29] H. Watanabe: *The representation of Brownian functionals by stochastic integrals*, preprint, 1993.
- [30] 渡辺信三: 確率微分方程式, 産業図書, 1975.